Pieri-rule of K-theory ring of maximal Isotropic Grassmannians (Representation Theory and Related Areas)

池田, 岳

数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 63-69

Pieri-rule of K-theory ring of maximal Isotropic Grassmannians

岡山理科大学・理学部　池田 岳
Takeshi Ikeda
Department of Applied Mathematics, Okayama University of Science

Abstract

K 理論的なシューベルト・カルキュラスの一般的な問題意識を説明する．2002 年に出版された A. Buch の結果が epoch-making である．その後の 15 年間にどのような結果が得られたかについて簡単に説明する．最後に，我々が最近得た結果を述べる．

1　一般旗多様体

古典的なシューベルト・カルキュラスはグラスマン多様体に対して展開された．その自然な一般化として一般旗多様体のシューベルト・カルキュラスを研究する．そのための基本設定と記号は以下の通りである．

- G: 連結複素半単純線型代数群
- B: G のボレル部分群（連結極大可解閉部分群）
- T: B に含まれる極大トーラス
- B^-: B の「反対」ボレル部分群，つまり $T = B \cap B^-$ となるボレル部分群．
- $W = N_G(T)/T$: ワイル群と長さ関数 $\ell\colon W \to \mathbb{N}$.
- P: 放物型部分群 $P \supset B$.
- P に付随して単純ルートの集合 $I = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ の部分集合 I_P が定まる．1 元集合 $I_P = \{\alpha_k\}$ が対応するのは極大放物部分群 P であり，このとき $P = P_k$ と書く．また $I_B = I$ である．
- $W_P \subset W$: s_i $(i \in I \setminus I_P)$ によって生成される部分群．
- $W^P := \{w \in W \mid \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \text{ for all } i \in I \setminus I_P\}$.
- 全単射 $W/W_P \cong W^P$ がある．

シューベルト多様体

シューベルト多様体は W^P の元ごとに定義される既約な閉部分多様体である．

- $w \in W^P$ に対して $e_w = \dot{w}P \in G/P$ と定義する．

- $G/P = \sqcup_{w \in W^P} B^- e_w$. $B^- e_w \cong \mathbb{C}^{\dim G/P - \ell(w)}$.
- $X_w = \overline{B^- e_w} = \sqcup_{v \geq w} B^- e_v$: Schubert variety.

例 1.1 (Grassmannian case)

- $G/P = Gr(d,n) =$ the Grassmannian of d-spaces in $\mathbb{C}^n$.
- $G = SL_n(\mathbb{C})$. $W = S_n$. $I_P = \{\alpha_d\} \subset I = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$.
- $W_P \cong S_d \times S_{n-d}$.
- $W^P = \{w \in S_n \mid w(i) < w(i+1) \text{ for } i \neq d\}$.
- $W^P \cong \mathcal{P}_{d,n} := \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d \mid n-d \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0\}$.
- $w(i) - i = \lambda_{d-i+1}$. Denote the Schubert structure constants by $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$.

例 1.2 ($LG(n)$)

- $G = Sp_{2n}(\mathbb{C})$. $P = P_{\{\alpha\}}$. α: the unique long simple root.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a symplectic form on $\mathbb{C}^{2n}$.
- $G/P = \{L \subset \mathbb{C}^{2n} \mid \dim(L) = n,\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L)\}$
  $= LG(n)$: the Lagrangian Grassmannian.
- $W = S_n \ltimes \{\pm 1\}^n$, $W_P = S_n$ であって，W^P は

  $$\mathcal{SP}_n := \{\lambda \in \mathbb{Z}^n \mid n \geq \exists r \geq 0\ n \geq \lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0,\ \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0\}$$

  と同一視される．$\mathcal{SP}_n$ の元を **strict partition** と呼ぶ．

例 1.3 ($OG(n)$)

- $G = SO_{2n+1}(\mathbb{C})$. $P = P_{\{\alpha\}}$. α: the unique short simple root.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a non-degenerate symmetric bilinear form on $\mathbb{C}^{2n+1}$.
- $G/P = \{V \subset \mathbb{C}^{2n+1} \mid \dim(V) = n,\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0 \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
  $= OG(n)$: the maximal orthogonal Grassmannian.
- W^P はやはり $\mathcal{SP}_n$ と同一視される．

2 K 理論的なシューベルト・カルキュラス

K 理論的なシューベルト・カルキュラスの基本問題を述べる．

- $K^0(G/P)$: G/P 上の局所自由層のなす Grothendieck 群．テンソル積によって環構造を持つ．
- $K_0(G/P)$: G/P 上の連接層のなす Grothendieck 群
- G/P は非特異なので $K^0(G/P) \cong K_0(G/P)$ と同一視できる．

- シューベルト多様体の構造層が基底を与える：

$$K_0(G/P) = \bigoplus_{w \in W^P} \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{X_w}].$$

- K 理論的シューベルト・カルキュラス

$$[\mathcal{O}_{X_w}] \cdot [\mathcal{O}_{X_v}] = \sum_{u \in W^P} (-1)^{\ell(u)-\ell(w)-\ell(v)} c_{w,v}^u [\mathcal{O}_{X_u}].$$

構造定数 $c_{w,v}^u$ は非負整数であることが知られている．$\ell(u) = \ell(w) + \ell(v)$ ならば $c_{w,v}^u$ はコホモロジー環 $H^*(G/P)$ のシューベルト構造定数と一致する．K 理論の場合は $\ell(u) > \ell(w) + \ell(v)$ であっても $c_{w,v}^u$ は一般には零でない．

以下のような結果が知られている．

- $K_0(Gr(d,n))$: Buch [1], 集合値の semistandard tableaux を用いて記述される．短い別証明が I.-Shimazaki [7] によって与えられている．
- $K_0(OG(n))$: $\mu = (k)$ (a row)「Pieri 規則」の場合は: Buch-Ravikumar [2] が証明した．一般の場合は Thomas-Yong [13] によって予想が与えられ Clifford-Thomas-Yong [4] によってその予想が示された．より新しい別な記述が Pechenik-Yong [8] によって与えられている．
- $K_0(LG(n))$: $\mu = (k)$ (a row)「Pieri 規則」の場合は: Buch-Ravikumar [2] が証明した．ピエリ規則の別証明が I.-Näruse-Numata [6] によって与えられている．
  一般の場合は予想さえ得られていない．

この講演の目的は $K_0(OG(n))$ の構造定数の新しい記述の予想を与えることである．特別な場合（ピエリ規則）が主定理である．

3 Pragacz の結果と Stembridge の規則

$LG(n), OG(n)$ のコホモロジー環のシューベルト構造定数に関して知られていることを説明する．

- $LG(n)$ と $OG(n)$ の場合は同一視 $W^P \cong \mathcal{SP}_n$ ができることを思い出す．
- Pragacz [9]: $[X_\lambda]_{LG}$ は Schur Q 関数 $Q_\lambda(x)$ によって表現され，$[X_\lambda]_{OG}$ は P 関数 $P_\lambda(x) = 2^{-r_\lambda} Q_\lambda(x)$ によって表現される．ここで r_λ は λ の零でない成分の個数である．特に
$$c_{\lambda,\mu}^\nu(LG) = 2^{r_\lambda + r_\mu - r_\nu} c_{\lambda,\mu}^\nu(OG)$$
である．

- P 関数の構造定数 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ の組合せ的記述は Stembridge [12] によって与えられた．そこでは **marked shifted tableaux**（後述）という組合せ的対象が用いられた．
- 新しい対象 **decomposition tableaux**（L. Serrano [10]）による別な規則が最近示された（S. Cho [3]）．以下に詳しく述べる．

3.1 Schur P-functions

アルファベットとして $1' < 1 < 2' < 2 < \cdots < n' < n$ を考える．$\lambda = (\lambda_1 > \cdots > \lambda_r > 0)$ を strict partition とする．シフトされたヤング図形は，ヤング図形を各行を右に 1 マスずつシフトしたものである．それにアルファベットを以下のように書き入れる：

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2' & 3' & 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{c|c|c|c|c|} \hline & 2 & 3' & 4 & 5 \\ \hline \end{array}\ \begin{array}{cc|c|} \hline & & 3 \\ \hline \end{array}, \quad x^T = x_1^1 x_2^2 x_3^6 x_4 x_5$$

以下の条件が成り立つとき T を **marked shifted tableau** と呼ぶ：

- 上から下に，左から右に弱い意味で増加する．
- $\begin{array}{|c|c|} \hline k' & k' \\ \hline \end{array}$ と $\begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline k \\ \hline \end{array}$ はゆるされない．
- 対角線上にはプライムのある文字は入らない．

次のことが大切である：

- P 関数の表示（Sagan [11], Worley [14]）

$$P_\lambda(x) := \sum_{T:\text{marked shifted tableau of shape } \lambda} x^T.$$

- $Q_\lambda(x) = 2^{r_\lambda} P_\lambda(x)$ は I. Schur（1911）によって S_n の射影表現の指標を求めるために導入された．

3.2 Decomposition Tableaux

Cho [3] は P 関数の構造定数を decomposition tableaux によって記述した．

- $\{1, \ldots, n\}$ に関するワード $w_1 \cdots w_r$ が **hook word** であるとは $w_1 < \cdots < w_s \geq w_{s+1} \geq \cdots \geq w_r$ となる s があることである．
- ワード $w_1 \cdots w_r$ が **decomposition tableau** であるとは正整数の減少列 $\mu = (\mu_1 > \cdots > \mu_l > 0)$ があって w を

$$w = w^{(l)} \cdot w^{(l-1)} \cdots w^{(1)} \quad \text{with length of } w^{(i)} = \mu_i,$$

と分解した時に $1 \leq i \leq l-1$ について $w^{(i+1)}w^{(i)}$ のなかで $w^{(i)}$ が hook subword であって最大の長さを持つものであることをいう．

μ を dccomposition tablcau の形 (shapc) と呼ぶ．例えば，$w = 121|1233$ は形 $\mu = (4, 3)$ の decomposition tableau である．

ワード w に対して 1 が現れる個数，2 が現れる個数，... を並べてできる $\mathbb{N}^n$ の元を w の**コンテント**と呼んで $\omega(w)$ で表す．

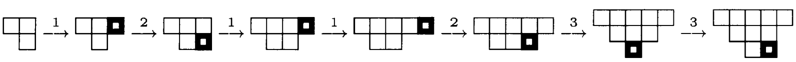
Serrano は形が λ の decomposition tableaux に渡る和として $P_\lambda(x)$ が $\sum x^{\omega(w)}$ と表されることを示した．

3.3 Cho の規則

$\mathcal{SP} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{SP}_n$ とおく．

定義 3.1 λ を strict partition とする．ワード $w = w_1 \cdots w_r$ が **λ-good** であるとは $\lambda + \omega(w_1 \cdots w_j) \in \mathcal{SP}$ がすべての $j \geq 1$ に対して成り立つことをいう．

$w = 121|1233$ は $(2, 1)$-good decomposition tableau である：



定理 3.2 (Cho [3]) P 関数の構造定数 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ は μ 上の decomposition tableaux であって λ-good かつコンテントが $\nu - \lambda$ であるものの総数と一致する．

4 $OG(n)$ の K 理論的ピエリ規則

予想の定式化：

- 集合値のワード (**set-valued word**) とは $\{1, \ldots, n\}$ の空でない部分集合 $\boldsymbol{w}_i$ の列 $\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_r$ である．
- 集合値のワード $\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_r$ が集合値の **decomposition tableau** であるとは $\boldsymbol{w}_1 \times \cdots \times \boldsymbol{w}_r$ が一定の形 λ の decomposition tableaux であることである．
- 集合値のワード $\boldsymbol{w}_1 \cdots \boldsymbol{w}_r$ の**線型化**は各 $\boldsymbol{w}_i$ の元を大きい順に読んで，えられたワードを繋げることによって得られるワードのことである．
- λ を $\mathcal{SP}_n$ の元とする．集合値 decomposition tableau は **λ-good** であるというのは，その線型化が Cho の意味で λ-good であることである．

予想 4.1 (Cho-I.-Nakasuji) $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{SP}_n$ とする．$K_0(OG(n))$ の構造定数 $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ は，μ 上

の集合値 decomposition tableaux であって λ-good かつコンテントが $\nu-\lambda$ であるものの個数と一致する.

K 理論的 P 関数 $GP_\lambda(x)$（I.-Naruse [5]）を用いて予想を証明することを考えている. この予想と Clifford-Thomas-Yong [4] や Pechenik-Yong [8] の結果との関係はわかっていない.

定理 4.2 **(Pieri rule (Cho-I.-Nakasuji))**　予想は $\mu=(k)$ の場合に正しい.

Buch-Ravikumar [2] の **KOG-tableaux** と λ-good な集合値 decomposition tableaux との間の全単射はわかっている.

本研究は科研費 15K04832 の補助を受けて行われた.

参考文献

[1] A. S. Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta Math. **189** (2002), No.1, pp. 37–78.

[2] A. S. Buch and V. Ravikumar, Pieri rules for the K-theory of cominuscule Grassmannians, J. Reine Angew. Math. **668** (2012), 109-132.

[3] S. Cho, A new Littlewood-Richardson rule for Schur P-functions, T. Am. Math. Soc. **365**, Num. 2 (2012), 939–972.

[4] E. Clifford, H. Thomas, and A. Yong, K-theoretic Schubert calculus for $OG(n, 2n+1)$ and jeu de taquin for shifted increasing tableaus, J. reine angew. Math. **690** (2014), pp. 51–63.

[5] T. Ikeda and H. Naruse: *K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q- functions*, Adv. Math. **243** (2013), 22-66.

[6] T. Ikeda, H. Naruse, Y. Numata, Bumping algorithm for set-valued shifted tableaux (extended abstract for FPSAC 2011, Reykjavik), Discrete Math. Theor. Comput. Sci. (online) Proceeding volume for fpsac 2011, 527–538.

[7] T. Ikeda and T. Shimazaki, A proof of K-theoretic Littlewood-Richardson rules by Bender-Knuth-type involusions, Math. Res. Lett. **21** (2014), No.2, pp.333–339.

[8] O. Pechenik and A. Yong, Genomic tableaux, J. Algebr. Comb. **45** (3), (2017), pp.649–685.

[9] P. Pagacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials. Topics in invariant theory (Paris, 1989/1990), 130–191, Lecture Notes in Math., 1478, Springer, Berlin, 1991.

[10] L. Serrano, The shifted plactic monoid, Math. Z. **266**, Issue 2 (2010), pp. 363–392.

[11] B. E. Sagan, Shifted tableaux, Schur Q-functions and a conjecture of R. Stanley, J. Comb. Theory A, **45** (1987), pp. 62–103.

[12] J. R. Stembridge, Shifted Tableaux and the Projective Representations of Symmetric Groups, Adv. Math. **74** (1989), pp. 87–134.

[13] H. Thomas and A. Yong, A jeu de taquin theory for increasing tableaux, with applications to K-theoretic Schubert calculus, Algebr. Number theory, 3:2 (2009), pp.121–148.

[14] D. R. Worley, A Theory of Shifted Young Tableaux, Ph. D. thesis, MIT (1984)